令和 7 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学　共通問題

令和 6 年 8 月 22 日（9 時 30 分 から 12 時 まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 4 題ある．全問に解答すること．
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること．
4) 受験番号をすべての解答用紙の（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．
5) 問題冊子は，このページを含め全3ページである．

記号

$\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$：正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$：実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ n は正の整数とし，$M_n(\mathbb{R})$ で n 次実正方行列全体のなす実ベクトル空間を表す．$A \in M_n(\mathbb{R})$ に対し，

$$Z(A) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対し，$Z(A)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$Z(A)$ の次元を求めよ．

(3) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が相異なる n 個の実固有値を持つとき，$Z(A)$ の次元を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ のユークリッド位相の開集合系を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ とおく．閉区間 $I = [0, 1]$ の部分集合族 $\mathcal{W}$ と $\mathcal{W}'$ をそれぞれ

$$\mathcal{W} = \{V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \mid V \subset (0, 1)\},$$
$$\mathcal{W}' = \{V \cup \{0, 1\} \mid V \in \mathcal{W}\}$$

とおき，I の部分集合族 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O} = \mathcal{W} \cup \mathcal{W}'$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $(I, \mathcal{O})$ は位相空間となることを示せ．

(2) 位相空間 $(I, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間であるかどうか，理由とともに答えよ．

(3) 写像 $f : (I, \mathcal{O}) \to (I, \mathcal{O}), f(x) = -4x^2 + 4x$ は連続写像であるかどうか，理由とともに答えよ．

(4) 写像 $g : (I, \mathcal{O}) \to (I, \mathcal{O}), g(x) = x^2$ は連続写像であるかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数からなる数列とし，$a_n \geq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ を満たすとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$a_n = \dfrac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ で与えられる $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ を満たすことを示せ．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ であることを示せ．

$\boxed{4}$ 実数 a, b は $a < b$ を満たすとする．関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ について，f が半開区間 $[a, b)$ で右微分可能であるとは，すべての $x \in [a, b)$ において，右極限

$$f'_+(x) = \lim_{\delta>0, \delta\to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

が実数の値として存在することを意味する．f が半開区間 $(a, b]$ で左微分可能であるとは，すべての $x \in (a, b]$ において，左極限

$$f'_-(x) = \lim_{\delta<0, \delta\to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

が実数の値として存在することを意味する．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であり，半開区間 $[a, b)$ 上で右微分可能とする．ある実数 m, M が存在し，任意の $x \in [a, b)$ に対して $m \leq f'_+(x) \leq M$ が成り立つとする．さらに，関数 $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & (x \neq a), \\ f'_+(a) & (x = a). \end{cases}$$

任意の正の実数 ε をとり，

$$A = \{x \in [a, b] \mid \text{任意の } y \in [a, x] \text{ に対して } m - \varepsilon \leq h(y) \leq M + \varepsilon\}$$

とおく．$\sup A > a$ を示せ．

(2) (1) の A に対して，$\sup A = b$ を示せ．

(3) 関数 $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は連続であり，半開区間 $[0, 1)$ 上で右微分可能とする．また，右導関数 g'_+ は半開区間 $[0, 1)$ で有界であり，点 $x_0 \in (0, 1)$ で連続とする．このとき，g は x_0 で微分可能であることを示せ．