令和 7 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 選択問題

令和 6 年 8 月 22 日（13 時 30 分 から 15 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．

2) 問題は 8 題ある．3 題を選択して解答すること．

3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること．

4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し，受験番号をすべての解答用紙の（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．

5) 問題冊子は，このページを含め全 9 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合
$\mathbb{Z}_{>0}$: 正の整数全体のなす集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合
$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合
$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ n を 3 以上の整数とする．n 次対称群および n 次交代群をそれぞれ S_n, A_n と表す．以下の問いに答えよ．

(1) A_n は S_n の長さ 3 の巡回置換全体で生成されることを示せ．

(2) 任意の群準同型 $f : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Ker}(f) \supset A_n$ を示せ．

(3) S_4 の正規部分群をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{C}[x,y,z]$ は不定元 x,y,z に関する $\mathbb{C}$ 上の 3 変数多項式環とし，$\mathbb{C}[s,t]$ は不定元 s,t に関する $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環とする．剰余環 $A = \mathbb{C}[x,y,z]/(xy - z^2)$ と剰余写像 $\pi : \mathbb{C}[x,y,z] \to A$ について，$\bar{x} = \pi(x)$，$\bar{y} = \pi(y)$，$\bar{z} = \pi(z)$ とおき，$I = (\bar{x}, \bar{z})$ を $\bar{x}, \bar{z}$ で生成される A のイデアルとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ 上の環準同型写像 $\Phi : \mathbb{C}[x,y,z] \to \mathbb{C}[s,t]$ を $\Phi(x) = s^2$，$\Phi(y) = t^2$，$\Phi(z) = st$ で定める．このとき，$\mathbb{C}$ 上の環準同型写像 $\varphi : A \to \mathbb{C}[s,t]$ が一意に存在して $\varphi \circ \pi = \Phi$ が成立することを示せ．また，φ は単射であることを示せ．

(2) φ の像は

$$B = \{f(s,t) \in \mathbb{C}[s,t] \mid f(-s,-t) = f(s,t)\}$$

に等しいことを示せ．

(3) $\mathbb{C}[s,t]$ のイデアル (s^2, st) は単項イデアルであるかどうか，理由とともに答えよ．

(4) I は A の単項イデアルであるかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{3}$ 2次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^2$の部分空間MとNを

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$
$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) 非負整数qについて，直積空間$L = M \times M$の整係数ホモロジー群$H_q(L)$を求めよ．

(2) LとNの非交和$N \sqcup L$において，Nの境界∂Nの各点$p \in \partial N = M$と$(p, p) \in L = M \times M$とを同一視してできる商空間を$X$とおく．非負整数$q$について，$X$の整係数ホモロジー群$H_q(X)$を求めよ．

$\boxed{4}$ 6次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^6$ の標準内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^6$ の部分空間 X を

$$X = \{v \in \mathbb{R}^6 \mid \langle v, v\rangle = 1\}$$

と定める．X は $\mathbb{R}^6$ の C^∞ 部分多様体であるかどうか，理由とともに答えよ．

(2) 直積空間 $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ の部分空間 Y を

$$Y = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \mid \langle v_1, v_1\rangle = 1, \langle v_2, v_2\rangle = 1, \langle v_1, v_2\rangle = 0\}$$

と定める．Y は $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ の C^∞ 部分多様体であるかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{5}$ m は閉区間 $I=[0,1]$ 上のルベーグ測度とし，I のルベーグ可測部分集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n)=0$$

を満たすとする．また，I の部分集合 A が与えられたとき，

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in I\setminus A)\end{cases}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たす I のルベーグ可測部分集合の列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげよ．

(i) $\lim_{n\to\infty} m(B_n)=0$.

(ii) 「I の上で m に関してほとんど至るところ $\lim_{n\to\infty}\chi_{B_n}(x)=0$」は成り立たない．

(2) ルベーグ可測関数 $f: I\to\mathbb{R}$ は $\int_I |f(x)|m(dx)<\infty$ を満たすとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f(x)|m(dx)=0$$

が成り立つことを示せ．

(3) I 上の実数値ルベーグ可測関数 g と I 上の実数値ルベーグ可測関数の列 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ は次の (a), (b) を満たすとする．

(a) $\int_I |g(x)|m(dx)<\infty$ かつ任意の $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\int_I |g_k(x)|m(dx)<\infty$.

(b) $\lim_{k\to\infty}\int_I |g_k(x)-g(x)|m(dx)=0$.

このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}\int_{A_n}|g_k(x)|m(dx)=0$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{6}$ $(X, \|\cdot\|)$ を実バナッハ空間とする．以下の問いに答えよ．

(1) 弱収束する点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ は有界列であることを示せ．

(2) 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が $x \in X$ に弱収束するならば，次が成り立つことを示せ．

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(3) $(X, \|\cdot\|)$ は次の条件 $(*)$ を満たすとする．

$$(*) \quad \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対してある } \delta > 0 \text{ が存在し,} \\ \quad y, z \in X, \|y\| \leq 1, \|z\| \leq 1, \|y - z\| > \varepsilon \quad \text{ならば} \quad \left\|\dfrac{y+z}{2}\right\| < 1 - \delta. \end{cases}$$

点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ は次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとする．

(i) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $x \in X$ に弱収束する．

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$.

このとき，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に強収束することを示せ．

$\boxed{7}$ 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則関数全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathcal{V}$ で表す．$\mathcal{V}$ の以下で与えられる部分ベクトル空間 P_k, Q, R はそれぞれ有限次元であるかどうか，理由とともに答えよ．また，有限次元の場合，その次元を求めよ．ただし，$k \in \mathbb{Z}$ とする．

(1) $P_k = \{f \in \mathcal{V} \mid$ 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $f(z) = z^k f(1/z)\}$.

(2) $Q = \{f \in \mathcal{V} \mid$ 任意の $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(z+n) = f(z)\}$.

(3) $R = \{f \in \mathcal{V} \mid$ 任意の $z \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(z+n+\sqrt{-1}m) = f(z)\}$.

$\boxed{8}$ 以下の集合の濃度をそれぞれ求めよ．

(1) 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の開集合全体のなす集合 $\mathcal{O}$.

(2) $\mathbb{R}$ のボレル集合全体のなす集合 $\mathcal{B}$.

(3) $\mathbb{R}$ のルベーグ可測集合全体のなす集合 $\mathcal{L}$.