

令和 9 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 共通問題

令和 8 年 8 月 20 日 (9 時 30 分 から 12 時 まで)

注意事項

- 1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.
- 2) 問題は 4 題ある. 全問に解答すること.
- 3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること.
- 4) 受験番号をすべての解答用紙の () 内に記入すること. また, 氏名は書かないこと.
- 5) 問題冊子は, このページを含め全 4 ページである.

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$: 正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

1 3次以下の実係数1変数多項式のなす実ベクトル空間を

$$V = \{f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \mid c_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, 1, 2, 3)\}$$

とする. V の元 $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ に対して $\tilde{f}(x) \in V$ を

$$\tilde{f}(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

と定め, 線形写像 $D: V \rightarrow V$ を

$$Df = \tilde{f} + 2f \quad (f \in V)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) D の固有値とその重複度をすべて求めよ.
- (2) 固有値のそれぞれについて, 固有空間の基底を一組求めよ.
- (3) D と可換な線形写像全体のなす実ベクトル空間を

$$Z = \{C: V \rightarrow V \mid C \text{ は線形で } CD = DC\}$$

とおく. Z の次元を求めよ.

2 n を正の整数とする. 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に同値関係 $\sim_n$ を次で定める.

$$(x, y) \sim_n (u, v) \iff (x^n, y^n) = \lambda(u^n, v^n) \text{ を満たす正の実数 } \lambda \text{ が存在する.}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の正の奇数 n に対して同値関係 $\sim_n$ は $\sim_1$ と一致し, 任意の正の偶数 n に対して同値関係 $\sim_n$ は $\sim_2$ と一致することを示せ.

ただし, 集合 A 上の同値関係 $\sim$ と $\sim'$ が一致するとは, 任意の $a, b \in A$ に対し, $a \sim b$ であることと $a \sim' b$ であることが同値であることをいう.

- (2) 商位相空間 $X_n = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim_n$ について, 以下の (i), (ii) を示せ.

(i) X_1 は円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相である.

(ii) X_2 は閉区間 $[0, 1]$ と同相である.

3 閉区間 $[0, 1]$ を I とおく. I 上の実数値関数 f と I 上の実数値関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, 次の二つの条件 (A), (B) を満たすとする.

(A) 任意の正の整数 n に対して f_n は I 上で単調非増加である.

(B) 任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

が成り立つ.

このとき以下の問いに答えよ.

(1) f は I 上で単調非増加であることを示せ.

(2) f が I 上で連続であるとき, 任意の正の数 ε に対してある正の整数 N と

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$$

を満たす I の元の有限列 $\{x_k\}_{k=0}^N$ が存在して, 次が成り立つことを示せ.

$$\text{任意の } k = 1, \dots, N \text{ に対して, } f(x_{k-1}) - f(x_k) < \varepsilon.$$

(3) f が I 上で連続であるとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

ただし, I 上の単調非増加な実数値関数は I 上でリーマン可積分であることを認めてよい.

4 実数 a, b, c は, $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ を満たすとする. $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して $f(x, y) > 0$ であることを示せ.
- (2) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 1\}$ の面積 $S(a, b, c)$ の値を, a, b, c を用いて表せ.
- (3) 定積分

$$I(a, b, c) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta}$$

の値を a, b, c を用いて表せ.