

令和 9 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 選択問題

令和 8 年 8 月 20 日 (13 時 30 分 から 15 時 30 分 まで)

注意事項

- 1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.
- 2) 問題は 8 題ある. 3 題を選択して解答すること.
- 3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること.
- 4) 解答用紙の左肩上部の に選択した問題番号を記入し, 受験番号をすべての解答用紙の () 内に記入すること. また, 氏名は書かないこと.
- 5) 問題冊子は, このページを含め全 8 ページである.

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$: 正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

1 群 G の集合 X への作用を

$$\alpha: G \times X \longrightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x := \alpha(g, x)$$

と表す. 元 $x \in X$ に対して, x の安定化群を

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の $x \in X$ および $g \in G$ に対して, G_x と $G_{g \cdot x}$ は G の部分群として共役であることを示せ.
- (2) G を 4 次対称群 S_4 とし, その部分群 $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ を考える. ただし, e は G の単位元である. このとき, H は G の正規部分群であることを示せ. また, 商群 G/H は非可換な群であることを示せ.
- (3) 群 $G = S_4$ を集合 $X = S_4$ に共役によって作用させる:

$$G \times X \longrightarrow X, (\sigma, x) \mapsto \sigma \cdot x := \sigma x \sigma^{-1}.$$

このとき, 元 $\tau = (12) \in X$ に対して, τ の安定化群 G_τ を求めよ.

2 $\mathbb{C}[x, y]$ を不定元 x, y に関する $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環とする. 剰余環 $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ と剰余写像 $\pi: \mathbb{C}[x, y] \rightarrow A$ について, $\bar{x} = \pi(x)$, $\bar{y} = \pi(y)$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{C}[t]$ を不定元 t に関する $\mathbb{C}$ 上の 1 変数多項式環とする. 環準同型 $\Phi: A \rightarrow \mathbb{C}[t]$ であって, 次の二つの条件 (a), (b) を満たすものが一意に存在することを示せ.

(a) 任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して, $\Phi(a) = a$.

(b) $\Phi(\bar{x}) = t^2$, $\Phi(\bar{y}) = t^3$.

また, Φ は単射であることを示せ.

(2) A は一意分解整域ではないことを示せ.

(3) $\mathbb{C}[x, y, z]$ を不定元 x, y, z に関する $\mathbb{C}$ 上の 3 変数多項式環とし,

$$\mathbb{C}[t, t^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^n a_i t^i \mid k, n \in \mathbb{Z}, n \geq k, a_i \in \mathbb{C} (k \leq i \leq n) \right\}$$

を不定元 t に関する $\mathbb{C}$ 上の 1 変数ローラン多項式環とする. このとき, $\mathbb{C}$ -代数として剰余環 $B = \mathbb{C}[x, y, z]/(y^2 - x^3, xz - 1)$ は $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ と同型であることを示せ.

3 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 A, B, X を

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + (z - 1)^2 = 1, -2 \leq x \leq 2\}, \\ X &= A \cup B \end{aligned}$$

でそれぞれ定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 非負整数 q に対し、 $A \cap B$ の整係数ホモロジー群 $H_q(A \cap B)$ を求めよ。
- (2) 非負整数 q に対し、 X の整係数ホモロジー群 $H_q(X)$ を求めよ。

4 4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 S を

$$S = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + u^2 - 2uv - v^2 = 1\}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) S は $\mathbb{R}^4$ の C^∞ -級部分多様体であることを示せ。
- (2) 多様体 S 上の関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める。

$$f(x, y, u, v) = x^2 - 2v^2 \quad ((x, y, u, v) \in S).$$

このとき、点 $p \in S$ での f の微分写像 $df_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ に関して、 S の部分集合 $\{p \in S \mid df_p = 0\}$ を求めよ。

- (3) 設問 (2) の関数 f は S 上で最大値・最小値をとるか、理由とともに答えよ。さらに、最大値をとる場合、その値と、最大値をとる点全体の集合を求めよ。また、最小値をとる場合、その値と、最小値をとる点全体の集合を求めよ。

5 $\mathbb{R}$ 上の二つの実数値ルベーク可測関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、それぞれ次の条件 (A) と (B) を満たすとする。ただし、 λ は $\mathbb{R}$ 上のルベーク測度である。

(A) 任意の正の整数 n と任意の正の実数 y に対して

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > ny\}) \leq \frac{1}{(y+1)^4}$$

が成り立つ。

(B) 任意の正の整数 n に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|^{\frac{3}{2}} \lambda(dx) \leq \frac{1}{n^3 (\log(n+1))^3}$$

が成り立つ。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) ある正の定数 C が存在して、任意の正の整数 n に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^3 \lambda(dx) \leq Cn^3$$

が成り立つことを示せ。

(2) 任意の正の整数 n に対して、関数 $f_n g_n$ は λ に関して $\mathbb{R}$ 上で可積分であることを示せ。

(3) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) g_n(x)| \lambda(dx)$$

は収束することを示せ。

(4) $\mathbb{R}$ 上で λ に関してほとんどいたるところ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n g_n = 0$ が成り立つことを示せ。

6 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を実ヒルベルト空間とし, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ($x \in H$) とする. $K \subset H$ を空でない有界閉凸集合とし, 空でない有界閉凸集合の列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ は次の二つの条件 (A), (B) を満たすとする.

(A) $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ は $K_n \subset K_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たし, かつ, $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = K$ を満たす.

(B) 任意の正の整数 n に対して, H のある有限次元部分空間 V_n が存在して K_n は V_n に含まれる.

また, 写像 $f: K \rightarrow K$ は連続であり, 任意の $u_0 \in K$ と u_0 に弱収束する K の任意の点列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ に対して $\{f(u_n)\}_{n=1}^\infty$ は $f(u_0)$ にノルム収束するとする. 以下の問いに答えよ.

(1) C を H 内の空でない閉凸集合とし, H から C への射影を P_C とする. すなわち, 任意の $x \in H$ に対して, $\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| \mid y \in C\}$ を満たすただ一つの C の元 y_0 を $P_C(x)$ と表す. このとき, 以下の (i), (ii) が成り立つことを示せ.

$$(i) \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0 \quad (x \in H, y \in C).$$

$$(ii) \|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in H).$$

(2) 点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ で, 任意の正の整数 n に対して次の二つの条件 (a), (b) を満たすものが存在することを示せ.

$$(a) x_n \in K_n. \quad (b) \langle f(x_n) - x_n, y - x_n \rangle \leq 0 \quad (y \in K_n).$$

ただし, 必要ならば次の事実 (*) を認めて使用してよい.

(*) D を, H のある有限次元部分空間 V に含まれる空でない有界閉凸集合とし, $g: D \rightarrow D$ を連続写像とする. このとき, $g(x) = x$ を満たす $x \in D$ が存在する.

以降, 設問 (2) で得られた点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を一つ固定する.

(3) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は弱収束する部分列を含むことを示せ. さらに, 以下ではそのような部分列 $\{x_{n(i)}\}_{i=1}^\infty$ を一つ固定するとき, その弱極限 x_∞ は K の元であることを示せ.

(4) 設問 (3) の x_∞ は $f(x_\infty) = x_\infty$ を満たすことを示せ.

7

以下の問いに答えよ。ただし、 i を虚数単位とする。

- (1) P を $\mathbb{C}$ の空でない有限部分集合とする。 f を、 P の各点を極とする $\mathbb{C} \setminus P$ 上の正則関数とする。 任意に $a \in P$ をとり、 f の極 a の位数を n とする。 a の開近傍 U を、 a 以外の P の点が含まれないようにとり、 U 上の正則関数 φ を

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z-a)^n f(z) & (z \in U \setminus \{a\}) \\ \lim_{w \rightarrow a} (w-a)^n f(w) & (z = a) \end{cases}$$

と定める。 また、複素数平面 $\mathbb{C}$ 上で a を中心とする正の半径をもつ円 C で、円 C の囲む領域と C の和集合が U の部分集合であるようなものをとる。 円 C を、反時計回りに 1 周する経路とみなす。 このとき、線積分

$$\int_C f(z) dz$$

の値を、 φ の k 階導関数 $\varphi^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を用いて表せ。

- (2) 設問 (1) の結果を $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$ に対して適用することにより、積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx$$

の値を求めよ。

8 S を空でない集合とし, $R \subseteq S \times S$ を次を満たす S 上の 2 項関係とする.

S の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 条件「任意の正の整数 n に対して $(a_{n+1}, a_n) \in R$ 」
を満たすものは存在しない.

また, κ を基数とし, S の濃度を κ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $A \subseteq S$ を空でない集合とする. このとき, ある $c \in A$ が存在して任意の $d \in A$ に対して

$$(d, c) \notin R$$

となることを示せ.

- (2) ある順序数 $\gamma < \kappa^+$ とある写像

$$h: S \rightarrow \gamma$$

で, 任意の $a, b \in S$ に対して

$$(a, b) \in R \Rightarrow h(a) < h(b)$$

となるものが存在することを示せ. ただし, κ^+ は κ を超える最小の基数とする.

- (3) 設問 (2) の条件を満たす $h: S \rightarrow \gamma$ で, $h(S) \subseteq \kappa$ となるものは常に存在するか, 理由とともに答えよ.